

# **Algoritma *Branch and Bound*** (Bagian 2)

Bahan Kuliah IF2251 Strategi Algoritmik  
Oleh: Rinaldi Munir

# Masih tentang *TSP*

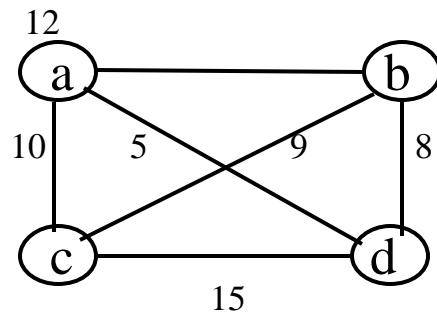
- Akan ditunjukkan pendekatan heuristik lain dalam menentukan nilai bound (*cost*) untuk setiap simpul di dalam pohon ruang status.

- Amati bahwa :

$$\text{bobot tur lengkap} = 1/2 \sum_{i=1}^n \text{bobot sisi } i_1 + \text{bobot sisi } i_2$$

- sisi  $i_1$  dan sisi  $i_2$  adalah dua sisi yang bersisian dengan simpul  $i$  di dalam tur lengkap.

- Contoh:



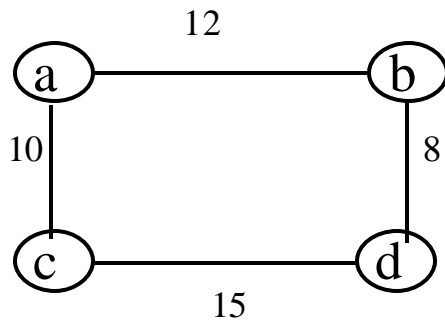
- Tur lengkap a, c, d, b, a bobotnya:

$$10 + 15 + 8 + 12 = 45$$

$$= 1/2 [ (10 + 12) + (10 + 15) + (15 + 8) + (12 + 8) ]$$

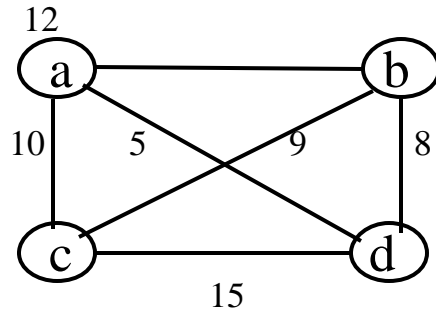
$$= 1/2 \times 90$$

$$= 45$$



- $M \equiv cost =$  bobot minimum tur lengkap  
 $\geq 1/2 \sum$  bobot sisi  $i_1 +$  bobot sisi  $i_2$
- Yang dalam hal ini, sisi  $i_1$  dan sisi  $i_2$  adalah sisi yang bersisian dengan simpul  $i$  dengan bobot minimum.
- $M$  dapat digunakan sebagai fungsi pembatas (*bound*) untuk menghitung cost setiap simpul di dalam pohon

- Contoh: TSP dengan simpul asal =  $a$



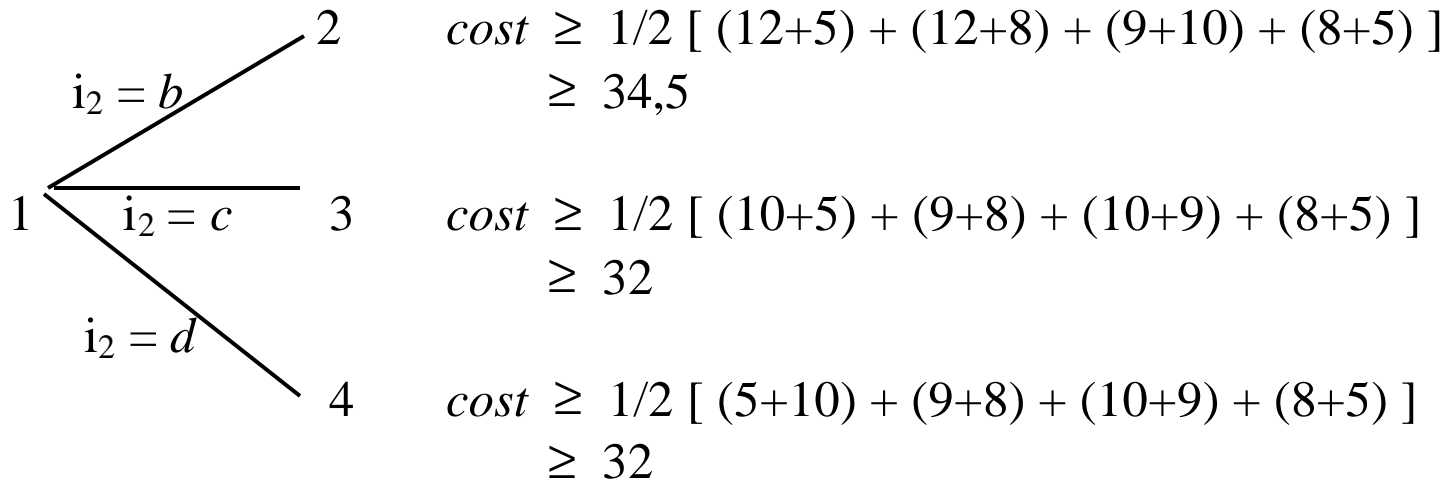
- Solusi dinyatakan sebagai  $I = (a, i_1, i_2, i_3, a)$ , yang dalam hal ini  $i_1, i_2,$  dan  $i_3$  adalah simpul lainnya.

- *Cost* untuk simpul akar (simpul 1)

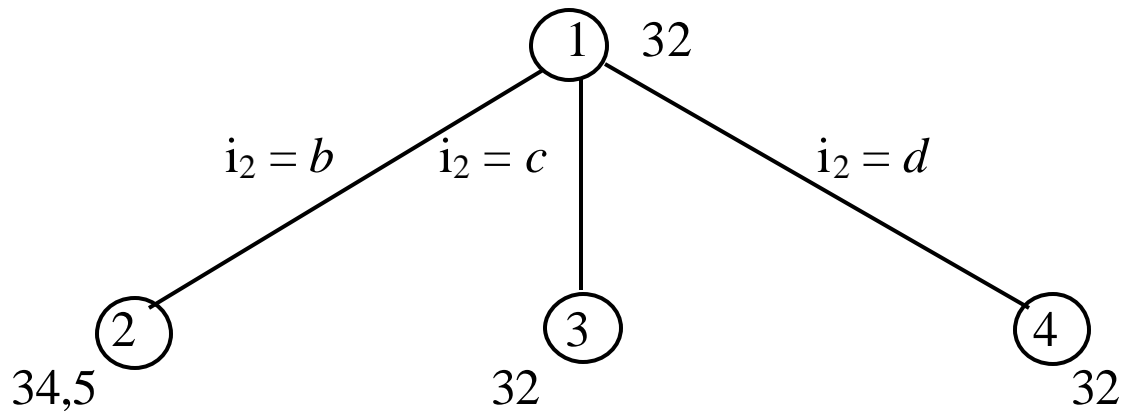
$$\begin{aligned} \text{cost} &\geq 1/2 [ (5+10) + (9+8) + (9+10) + (8+5) ] \\ &\geq 32 \end{aligned}$$

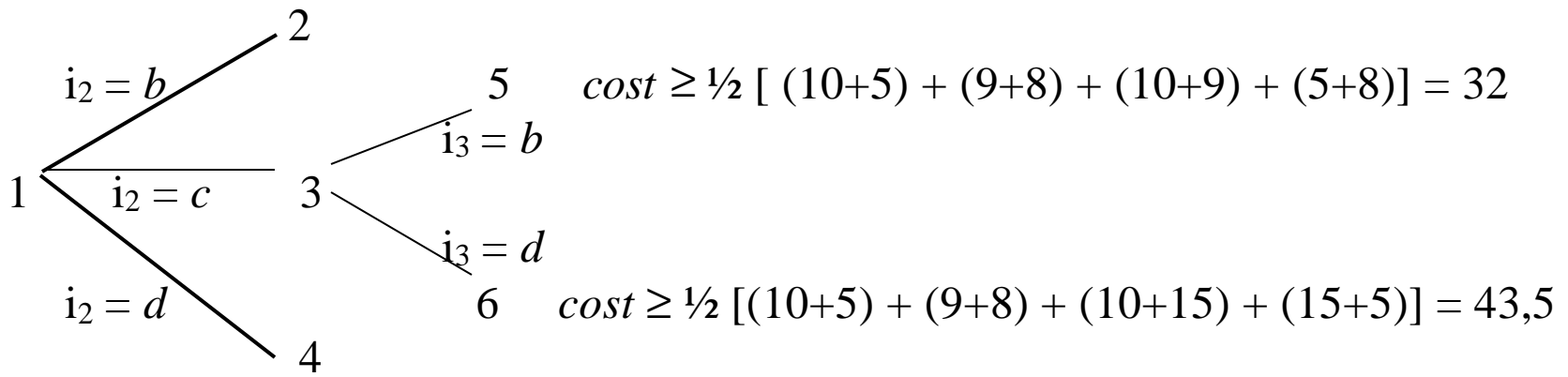
①

32



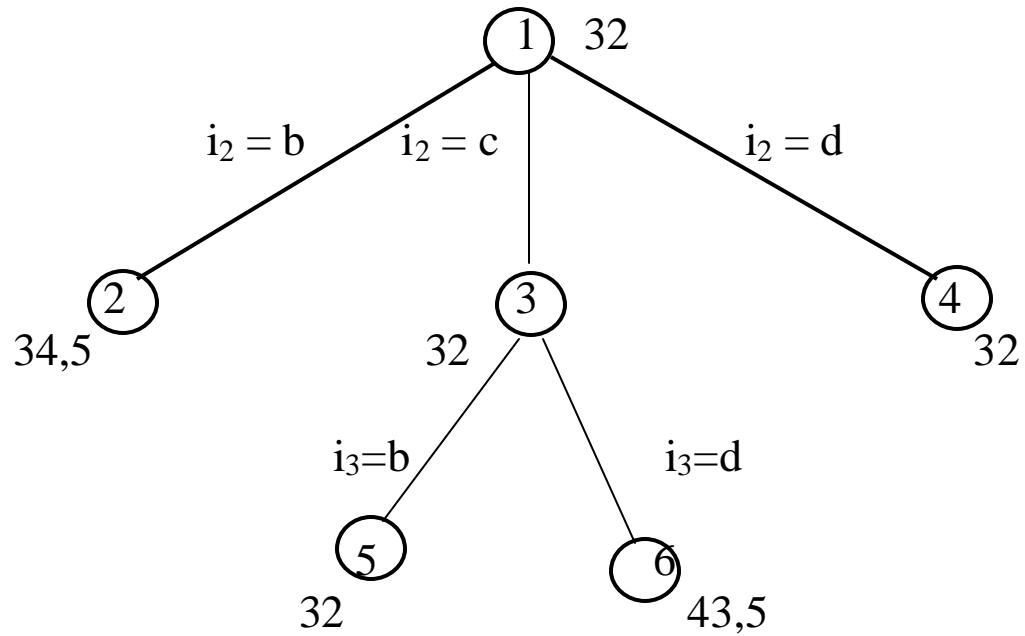
- Pohon ruang status yang sudah terbentuk:



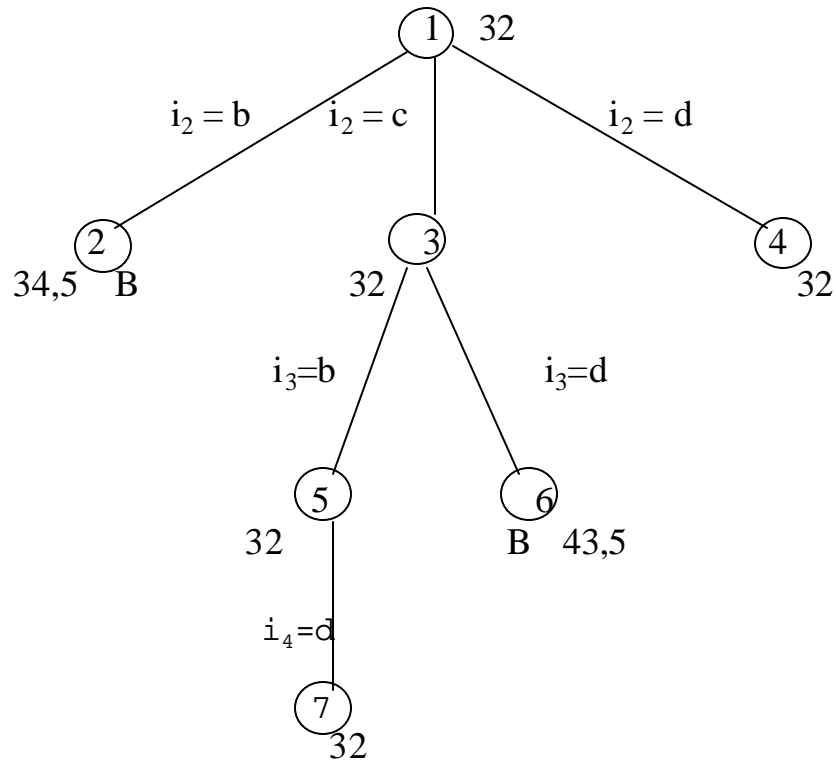




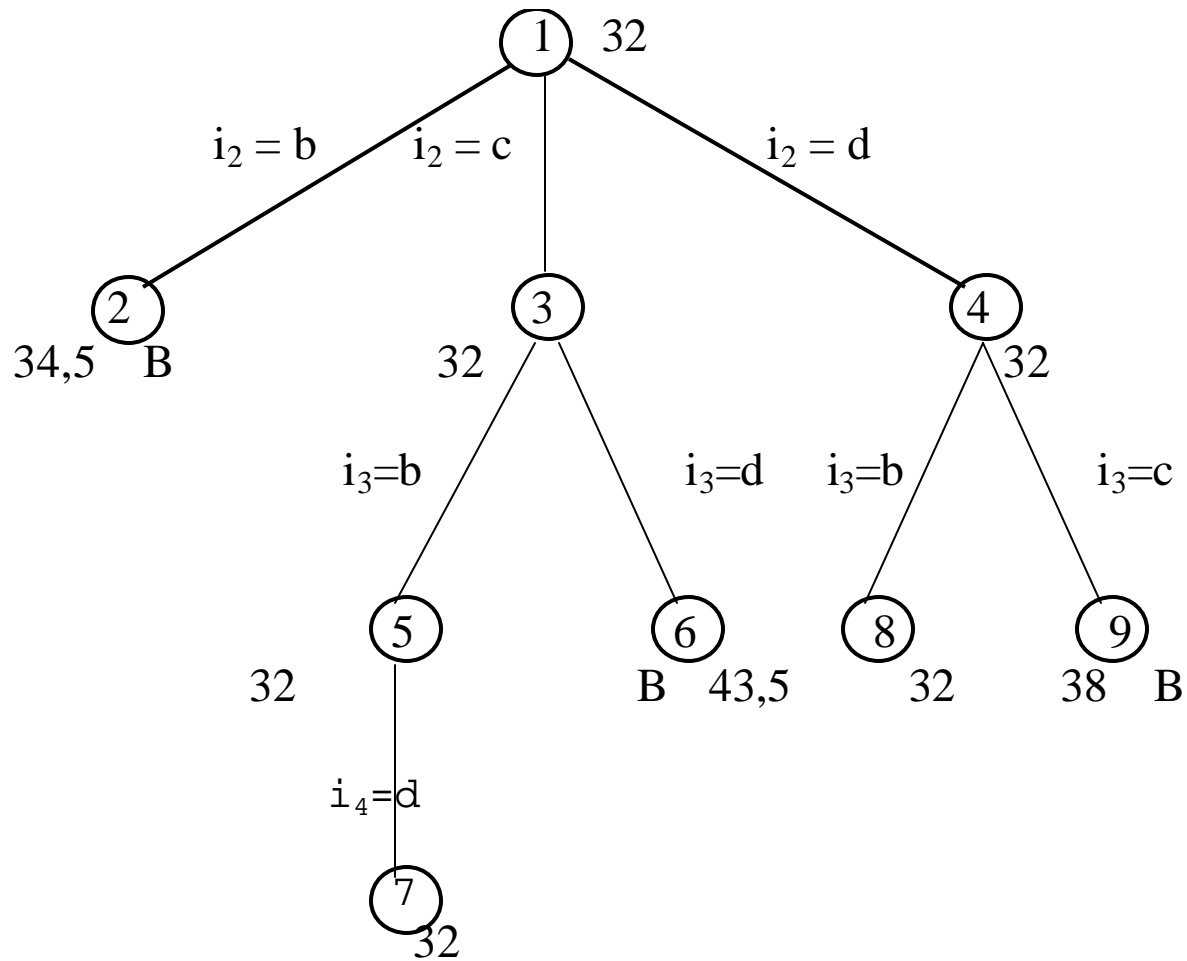
- Pohon ruang status yang sudah terbentuk:



- Pohon ruang status yang terbentuk:

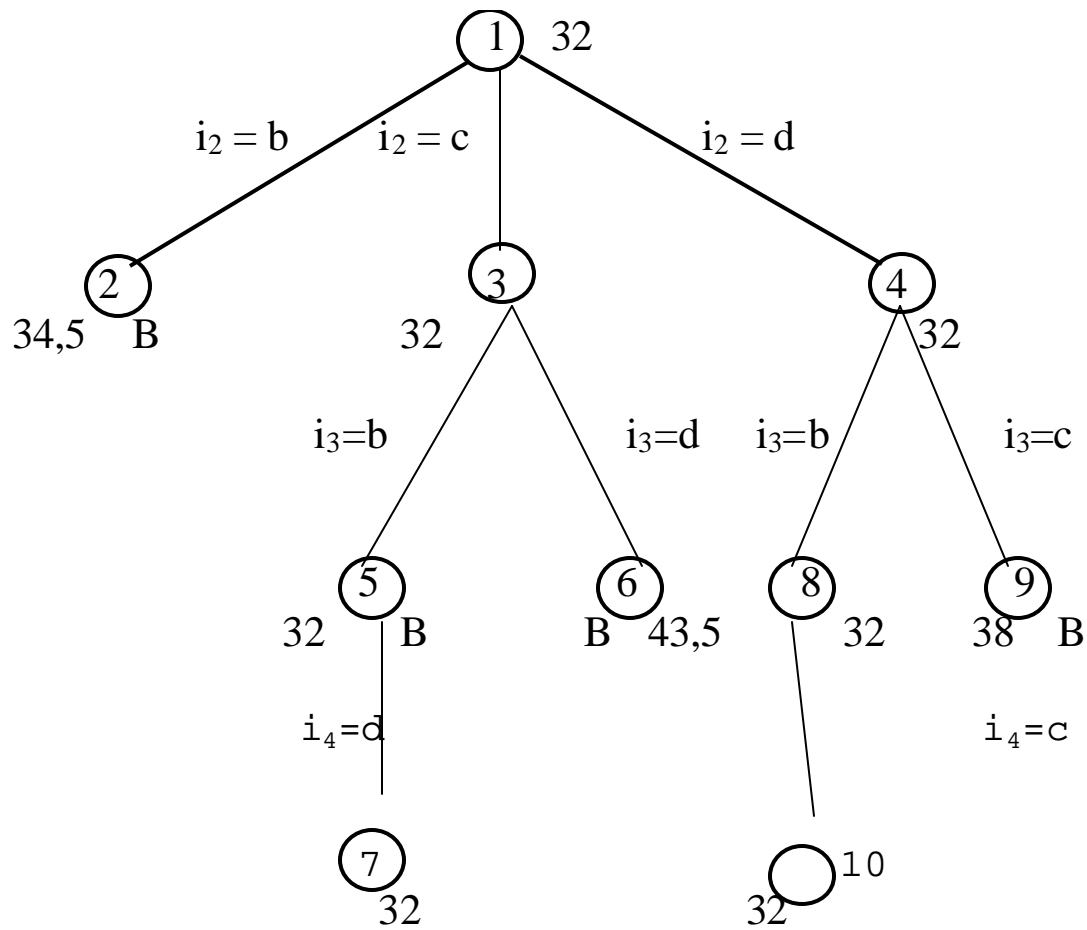


- Solusi pertama: Tur a, c, b, d, a dengan bobot 32 (*the best solution so far*). Bunuh semua simpul dengan cost  $> 32$ . (ditandai dengan B)



$$\text{Cost simpul 8} \geq \frac{1}{2}[(5+10)+(8+9)+(9+10)+(5+8)] = 32$$

$$\text{Cost simpul 9} \geq \frac{1}{2}[(5+10)+(8+9)+(15+9)+(5+15)] = 38$$



- $Cost \text{ simpul } 10 \geq \frac{1}{2}[(5+10)+(9+8)+(9+10)+(5+8)] = 32$

- Solusi ke-2: tur a, d, b, c, a dengan bobot 32
- *The best solution so far* tidak berubah
- Tidak ada lagi simpul hidup di dalam pohon ruang status, maka *the best solution so far* menjadi solusi final.
- Solusi *TSP* tersebut adalah tur a, c, b, d, a dengan bobot = 32.

# Masalah Penugasan

## *(Assignment Problem)*

**Persoalan:** Misalkan terdapat  $n$  orang dan  $n$  buah pekerjaan (*job*). Setiap orang akan di-*assign* dengan sebuah pekerjaan. Penugasan orang ke- $i$  dengan pekerjaan ke- $j$  membutuhkan biaya sebesar  $c(i, j)$ . Bagaimana melakukan penugasan sehingga total biaya penugasan adalah seminimal mungkin? Misalkan instansiasi persoalan dinyatakan sebagai matriks  $C$  sebagai berikut:

$$C = \begin{bmatrix} \text{Job 1} & \text{Job 2} & \text{Job 3} & \text{Job 4} \\ 9 & 2 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 3 & 7 \\ 5 & 8 & 1 & 4 \\ 7 & 6 & 9 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Orang } a \\ \text{Orang } b \\ \text{Orang } c \\ \text{Orang } d \end{array}$$

Selesaikan persoalan ini dengan algoritma *branch and bound*. Di dalam menjawab persoalan ini tentukan cara menghitung fungsi *bound*. Lalu gambarkan pohon ruang status yang terbentuk selama pencarian solusi.

- Jika diselesaikan *exhaustive search*:
  1. Nyatakan solusi sebagai  $(j_1, j_2, \dots, j_n)$   
 $j_i$  = nomor job yang di-assign ke orang  $i$   
Contoh: (2, 3, 4, 1) artinya:
    - job 2 untuk orang 1
    - job 3 untuk orang 2
    - job 4 untuk orang 3
    - job 1 untuk orang 4
  2. Bangkitkan semua permutasi dari 1, 2, ...,  $n$
  3. Hitung total biaya untuk semua permutasi, pilih yang paling kecil  $\rightarrow$  solusi.

Contoh:

$$(1, 2, 3, 4) \quad \text{cost} = 9 + 4 + 1 + 4 = 18$$

$$(1, 2, 4, 3) \quad \text{cost} = 9 + 4 + 8 + 9 = 30$$

$$(1, 3, 2, 4) \quad \text{cost} = 9 + 3 + 8 + 4 = 24$$

$$(1, 3, 4, 2) \quad \text{cost} = 9 + 3 + 8 + 6 = 26$$

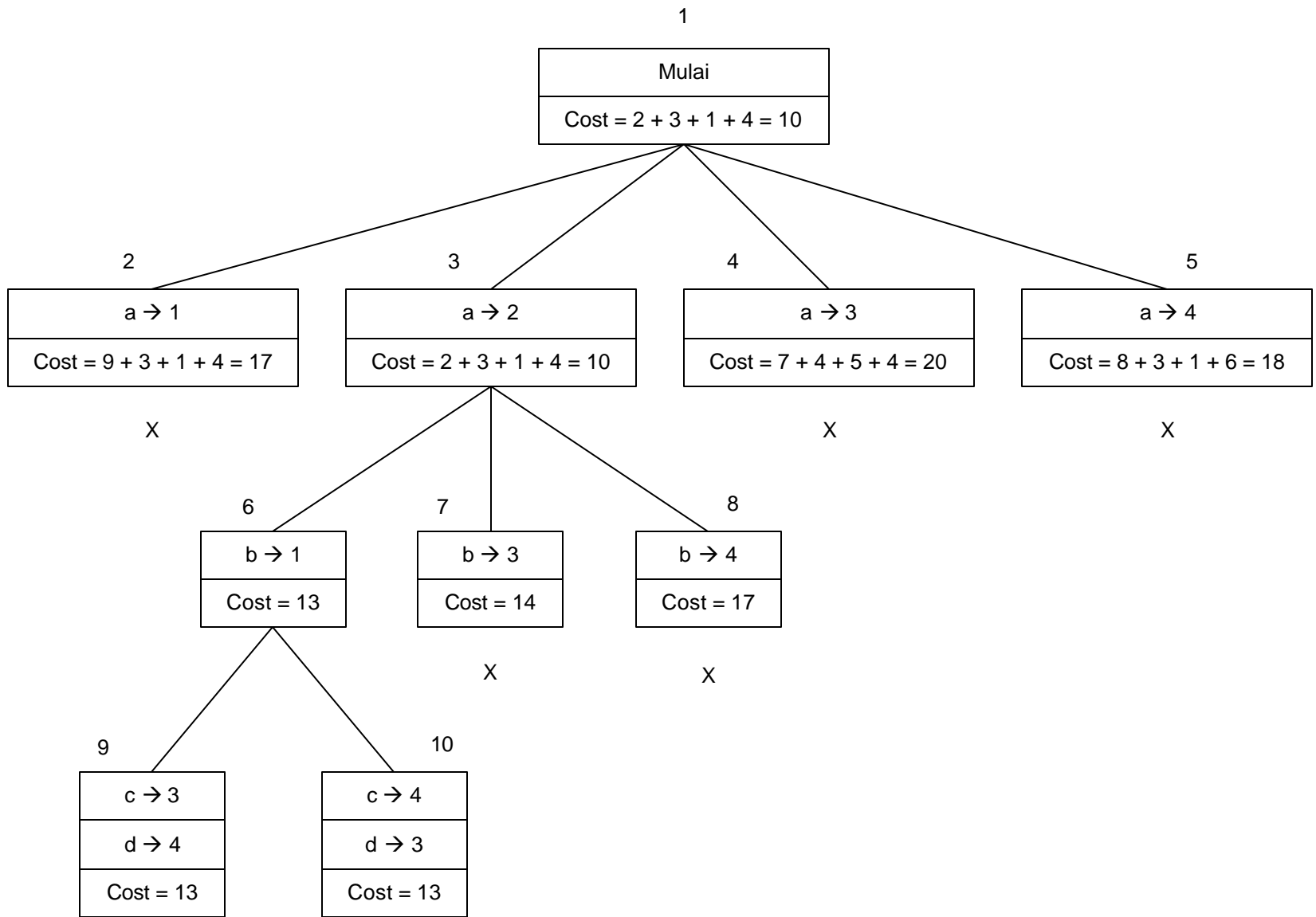
$$(1, 4, 2, 3) \quad \text{cost} = 9 + 7 + 8 + 9 = 33$$

dst...



# Penyelesaian dengan algoritma *Branch and Bound*

- Bagaimana menentukan *lower bound*?
- Salah satu caranya dengan mengamati bahwa *cost* sembarang solusi, termasuk solusi optimal, tidak mungkin lebih kecil dari jumlah elemen terkecil pada setiap baris matriks.
- Pada matriks di atas:  $2 + 3 + 1 + 4 = 10$
- Nilai 10 adalah *lower bound*, meskipun bukan *cost* solusi yang sah (3 dan 1 berasal dari kolom yang sama).



Solusi optimal

Solusi yang tidak lebih baik

Solusi: a → 2, b → 1, c → 3, d → 4

